Equations différentielles covariantes et représentations de l'algèbre de Virasoro

C. Itzykson

PHYSIQUE THEORIQUE
SACLAY
CEA/DSM

T93/020

Equations différentielles covariantes et représentations de l'algèbre de Virasoro

Cl. Itzykson
CEA/Saclay, Service de Physique Théorique[a]
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

Colloque de Géométrie Analytique Complexe
Paris, France
29 Juin - 3 Juillet 1992.
Norguet F., Ofman S., Szczeciniarz J.-J. (eds.)

[a] Unité associée CNRS/SPM/URA 2306

Equations Differentielles Covariantes
et Représentations de l'Algèbre de Virasoro

Claude Itzykson
Service de Physique Théorique, CEA-Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

1. La théorie des champs conforme s'appuie sur une grande diversité de disciplines mathématiques parmi lesquelles figure certainement la géométrie analytique. Le présent exposé est consacré à la considération d'équations différentielles covariantes qui conduisent à la construction explicite de "vecteurs singuliers" pour certains modules relatifs à l'algèbre de Virasoro. Ces termes seront précisés dans la suite. L'intérêt de cette construction est de fournir ultérieurement des équations qui déterminent les fonctions de corrélations de la théorie des champs correspondante, équations qui constituent, dans le cadre où nous nous plaçons, l'analogue des équations de Knizknik Zamolodchikov relatives aux algèbres de Lie affines. Par manque de place il n'est guère possible de développer ici tout l'appareil qui permet de préciser le contexte et les applications. On omettra aussi de donner des preuves détaillées qu'on pourra trouver dans les articles cités. Le résultat essentiel est contenu dans la proposition 6–2. dont le texte ci-dessous n'est qu'une explication.

Je remercie les organisateurs du colloque pour m'avoir donné l'occasion de présenter des travaux effectués en collaboration avec M. Bauer, P. Di Francesco et J.-B. Zuber.

2. Nous voulons donner un sens intrinsèque à un opérateur différentiel (à une seule variable) c'est-à-dire indépendant du choix de la coordonnée locale utilisée. Notre discussion étant locale, on suppose donné un ouvert relativement compact dans R ou dans C (voire sur une surface de Riemann) et on se borne à y introduire une coordonnée à changement univalent suffisamment régulier près (suivant le contexte la régularité s'entend au sens différentiable ou holomorphe). Dans ces conditions les Jacobiens ne s'annulant jamais on peut donner un sens aux espaces $\mathcal{F}_\lambda$ de "λ -différentielles régulières", λ quelconque, telles que par un changement $x \longleftrightarrow \hbar$ (suffisamment régulier) on ait $f \longleftrightarrow \bar{f}$ avec

$$\bar{f} \subsetneq \hbar \supsetneq d\hbar^\lambda \nleftrightarrow f \subsetneq x \supsetneq dx^\lambda$$

En pratique nous n'utiliserons que des valeurs de λ rationnelles.

Si pour un choix de coordonnée on dispose d'un opérateur différentiel Q_n normalisé d'ordre n de la forme $\subsetneq d \equiv \frac{d}{dx} \supsetneq$

$$Q_n \nleftrightarrow d^n \not\supseteq a_{\nvDash} \subsetneq x \supsetneq d^{n-\nvDash} \not\supseteq \ldots \not\supseteq a_n \subsetneq x \supsetneq$$

appliquant $\mathcal{F}_\lambda$ dans $\mathcal{F}_{\lambda \not\supseteq n}$, il ne conservera cette forme, telle que le Wronskien de n solutions linéairement indépendantes de $\urcorner\diagdown$ Q_n soit une constante, que si ce Wronskien appartient aux scalaires c'est-à-dire à $\mathcal{F}_{\nvDash}$. Or on montre sans peine que le Wronskien de n éléments est une application de

$\ngeq^n \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_{n\lambda \nsupseteq \frac{n\subsetneq n-\nVdash\supsetneq}{\nvDash}}$. Le choix de cible $\mathcal{F}_{\nvDash}$ implique donc

$$\lambda \;\; \nleftrightarrow \frac{\nVdash - n}{\nvDash}$$

$$Q_n \;\; \nLeftarrow \mathcal{F}_{\frac{\nVdash-n}{\nvDash}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\frac{\nVdash\nsupseteq n}{\nvDash}}$$

Considérons les lois de transformation de $a_{\nvDash}, ...a_n$ dans un changement de coordonnée. On les obtiendra en explicitant le Wronskien

$$Q_n f \equiv W_{n\nsupseteq\nVdash}\subsetneq f, f_{n-\nVdash}, ..., f_{\nvdash}\supsetneq / W_n \subsetneq f_{n-\nVdash}, ..., f_{\nvdash}\supsetneq \;,$$

où $f, f_{n-\nVdash}, ..., f_{\nvdash}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\frac{\nVdash-n}{\nvDash}}$ et les n derniers constituent localement une base de $\urcorner\diagdown\, Q_n$, (bien entendu la notation W_p est pour le Wronskien). On en tire sans peine le résultat classique

$$\hbar_{\nvDash}\subsetneq\hbar\supsetneq d\hbar^{\nvDash} \nleftrightarrow a_{\nvDash}\subsetneq x\supsetneq dx^{\nvDash} \nsupseteq \frac{n\subsetneq n^{\nvDash} - \nVdash\supsetneq}{\nVdash\nvDash} \{x, \hbar\}\, d\hbar^{\nvDash}$$

où

$$\{g\subsetneq x\supsetneq, x\} \nleftrightarrow \frac{g'''\subsetneq x\supsetneq}{g'\subsetneq x\supsetneq} - \frac{\nVdash}{\nvDash}\subsetneq\frac{g''\subsetneq x\supsetneq}{g'\subsetneq x\supsetneq}\supsetneq^{\nvDash}$$

est la dérivée Schwarzienne de l'application $x \longrightarrow g\subsetneq x\supsetneq$ et s'annule si g est homographique, un signal que nous décrivons un aspect de la géométrie différentielle projective. Si l'on cherche à préciser comment se transforment $a_{\nVdash}, a_{\ntrianglerighteq}$... on trouve des expressions de plus en plus complexes sans interprétation géométrique évidente. Ceci suggère de considérer une transformation triangulaire, donc inversible, $a_k\subsetneq x\supsetneq \longleftrightarrow w_k\subsetneq x\supsetneq$ où les $w_k\subsetneq x\supsetneq$ sont des polynômes différentiels dans les $a_r\subsetneq x\supsetneq$ (c'est-à-dire polynômes dans les $a_r\subsetneq x\supsetneq$ et un nombre fini de leurs dérivées) qui jouissent des deux propriétés suivantes:

(a) les w_k engendrent le même anneau différentiel que les a_k, ce qui est acquis dès que la transformation $\subsetneq a_k\supsetneq \longleftrightarrow \subsetneq w_k\supsetneq$ est inversible

(b) $w_k \in \mathcal{F}_k \qquad \nVdash \leq k \leq n$.

Pour la commodité on posera

$$a_{\nvDash}\subsetneq x\supsetneq \nleftrightarrow \frac{n\subsetneq n^{\nvDash} - \nVdash\supsetneq}{\ntrianglelefteq} w_{\nvDash}\subsetneq x\supsetneq$$

et on dira que $w_{\nvDash}$ est une différentielle quadratique projective. En général le choix des w_k n'est pas unique, dès que $k > \ntrianglelefteq$ (ce qui suppose bien entendu $n > \ntrianglelefteq\supsetneq$ mais la construction que nous donnons ci-dessous (inspirée en partie de Drinfeld et Sokolov) est, en un sens, canonique dans la mesure où comme on va le voir elle utilise le plongement "maximal" de $\mathbb{SL}_{\nvDash}$ dans $\mathbb{SL}_n$.

Il est commode de substituer à Q_n opérateur différentiel linéaire du n-ième ordre, un opérateur matriciel du premier ordre, par exemple

$$\widetilde{Q_n} \nleftrightarrow \begin{vmatrix} d & a_{\nvDash} & a_{\nVdash} .... & a_n \\ -\nVdash & d & \nvdash .... & \nvdash \\ \nvdash & -\nVdash & d .... & \nvdash \\ \nvdash .... & & -\nVdash & d \end{vmatrix}$$

qu'on écrira $\widetilde{Q} \nleftrightarrow d\nVdash \nsupseteq \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ appartient à l'algèbre de Lie $A_{n-\nVdash}$. Cette association $Q_n \longleftrightarrow \widetilde{Q_n}$ est telle que la projection sur la dernière composante (des vecteurs sur lesquels agit $\widetilde{Q_n}\supsetneq$ assure un isomorphisme

$$\urcorner\diagdown\,\widetilde{Q_n} \longleftrightarrow \urcorner\diagdown\, Q_n$$

Précisément parce qu'il s'agit d'une projection, il est possible de modifier $\widetilde{Q_n}$ de manière substantielle sans affecter cet isomorphisme. C'est cette liberté qui permet de donner à $\widetilde{Q_n}$ une forme canonique en utilisant une transformation de jauge unipotente, c'est-à-dire de la forme

$$\widetilde{Q_n} \longrightarrow U^{-\nvDash}\subsetneq x\supsetneq\widetilde{Q_n}U\subsetneq x\supsetneq$$

où $U\subsetneq x\supsetneq$ est une matrice dont les éléments sont nuls sous la diagonale et égaux à l'unité le long de la diagonale, et qui donc respecte l'isomorphisme entre noyaux (et la filtration des composantes des vecteurs).

Introduisons alors l'application de $A_{\nvDash} \longrightarrow A_{n-\nvDash}$, qui correspond à la représentation irréductible de $A_{\nvDash}$ de dimension $n \nleftrightarrow \nvDash j \nsupseteq \nvDash \subsetneq j$ entier ou demi entier) telle que

$$J_- \nleftrightarrow \begin{pmatrix} \nvdash & & & & \\ \nvDash & \nvdash & & & \\ \vdots & \nvDash & \nvdash & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \nvdash & & & \nvDash & \nvdash \end{pmatrix} \quad J_{\nvdash} \nleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{n-\nvDash}{\nvdash} & & \\ & \frac{n-\nvDash}{\nvdash} & \nvdash \\ \nvdash & \ddots & \\ & & \frac{\nvDash-n}{\nvdash} \end{pmatrix}$$

$$J_{\nsupseteq} \nleftrightarrow \begin{pmatrix} \nvdash & \nvDash\subsetneq n-\nvDash\supsetneq & \nvdash\ldots & \nvdash \\ & \nvdash & \nvdash\subsetneq n-\nvdash\supsetneq & \\ \vdots & & \nvdash & \\ \vdots & & & \ddots \quad \subsetneq n-\nvDash\supsetneq\nvDash \\ \nvdash & & & \nvdash \end{pmatrix}$$

$$\left[J_{\nvdash}, J_{\pm}\right] \nleftrightarrow \pm J_{\pm} \qquad \left[J_{\nsupseteq}, J_-\right] \nleftrightarrow \nvdash J_{\nvdash}.$$

Proposition 2.1 Il existe une transformation unipotente $U\subsetneq x\supsetneq$ telle que $\subsetneq i\supsetneq$ $U^{-\nvDash}\subsetneq x\supsetneq\widetilde{Q_n}U\subsetneq x\supsetneq \nleftrightarrow -J_-d\nvDash\nsupseteq$ $\sum_{k\nleftrightarrow\nvDash}^{n} w_k\nsupseteq\nvDash\subsetneq x\supsetneq J_{\nsupseteq}^{k}$

(ii) les w_k sont des polynômes différentiels dans les a_r, la relation étant triangulaire inversible, avec

$$\begin{aligned} a_k &\nleftrightarrow \sigma_{k-\nvDash}w_k \nsupseteq \ldots \\ \sigma_k &\nleftrightarrow \frac{k\supsetneq^{\nvdash}}{\subsetneq\nvdash k\nsupseteq\nvDash\supsetneq\supsetneq} n\subsetneq n^{\nvdash} - \nvDash\supsetneq\ldots\subsetneq n^{\nvdash} - k^{\nvdash}\supsetneq \end{aligned}$$

(iii) $w_k \in \mathcal{F}_k \quad \nvDash \leq k \leq n \quad w_{\nvdash}$ différentielle quadratique projective.

On trouvera la preuve et des expressions explicites dans notre article cité en référence.

Remarques

1) Les expressions w_k ont un sens géométrique intrinsèque. Par exemple si $n \nleftrightarrow \nvDash$ et si on identifie les coordonnées homogènes d'une courbe dans $CP_{\nvdash}$ paramétrée par x au voisinage d'un point avec les trois solutions indépendantes du noyau d'un opérateur differentiel $Q_{\nvDash}$, alors $w_{\nvDash}$ est une "courbure projective" naturelle.

2) Il existe un autre choix "naturel" de générateurs w_k correspondant à la formule de "transvectant" de Gordan.

3) Nous n'abordons pas ici la théorie de Gelfand-Dikey et Drinfeld et Sokolov relative à une structure symplectique sur les opérateurs différentiels Q_n par manque de place. Elle conduit à des systèmes intégrables qui trouvent aussi leur place dans le contexte des théories conformes et se généralisent aux autres algèbres de Lie que $A_{n-\nvDash}$.

3. Nous allons voir que la présentation précédente des opérateurs différentiels conduit à une généralisation *où les coefficients sont à leur tour des opérateurs*, qui permet de trouver des "vecteurs singuliers" dans les modules de plus haut poids pour l'algèbre de Virasoro. Il nous faut donc — très succintement — en rappeler les définitions.

L'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle (ou algèbre de Witt) peut aussi se comprendre comme celle des champs de vecteurs holomorphes sur la sphère de Riemann privée de deux points $\subsetneq\nvdash$ et ∞ par exemple).

Dans les applications à la mécanique quantique les symétries sont réalisées projectivement, ce qui se traduit au niveau des algèbres de Lie par des extensions centrales. Dans le cas présent physiciens et mathématiciens indépendemment ont découvert que l'algèbre de Witt admet essentiellement une unique extension centrale que l'usage attribue désormais à Virasoro. Elle est engendrée par des éléments L_m, $m \in \mathbb{Z}$ et c appartenant au centre, tels que

$$\frown L_m, L_w \frown \nleftrightarrow \subsetneq m - n \supsetneq L_{m \not\supseteq n} \not\supseteq \frac{c}{\nvDash\nVdash} m \subsetneq m^{\nVdash} - \nvDash \supsetneq \delta_{m \not\supseteq n, \nvdash}$$

où $\delta_{a,b}$ est le symbole de Kronecker. Dans les représentations que nous considérons c agit par multiplication par un scalaire - qu'on notera lui-même c, appelé *charge centrale.*

Soit B la sous algèbre engendrée par le scalaire c fixé et les L_m, $m \geq \nvdash$. On dira qu'une représentation *est de plus haut poids* s'il existe un vecteur f (le plus haut poids), qui engendre une représentation unidimensionnelle de B de la forme

$$L_{\nvdash} f \nleftrightarrow hf$$

$$L_m f \nleftrightarrow \nvdash \quad m > \nvdash$$

On appelera module de Verma (pour l'algèbre de Virasoro) une représentation de plus haut poids $V \subsetneq c, h \supsetneq$ librement engendrée sur le corps de définition — en pratique $C-$ par les éléments, $k \geq \nvdash$,

$$f_{p_{\nvDash}, p_{\nVdash} \dots, p_k} \nleftrightarrow L_{-p_{\nvDash}} L_{-p_{\nVdash}} \dots L_{-p_k} f \qquad \nvDash \leq p_{\nvDash} \leq p_{\nVdash} \leq \dots \leq p_k$$

Notons que $L_{\nvdash} f_{p_{\nvDash}, p_{\nVdash} \dots} \nleftrightarrow \subsetneq h \not\supseteq p_{\nvDash} \not\supseteq p_{\nVdash} \not\supseteq \dots \supsetneq f_{p_{\nvDash}, p_{\nVdash}, \dots}$. De tels modules peuvent être réductibles. Ceci se produit lorsqu'on peut trouver une application injective

$$V \subsetneq c, h \not\supseteq n \supsetneq \longrightarrow V \subsetneq c, h \supsetneq$$

et on appelle *vecteur singulier* (au niveau $n \supsetneq$ l'image du vecteur de plus haut poids de $V \subsetneq c, h \not\supseteq n \supsetneq$ par cette application. C'est donc une combinaison linéaire de la forme

$$F \nleftrightarrow \sum_{p_{\nvDash} p_{\nVdash} \not\supseteq \dots \nleftrightarrow n} c_{p_{\nvDash}, p_{\nVdash}, \dots} f_{p_{\nvDash}, p_{\nVdash},} \equiv \phi \subsetneq L_{-\nvDash}, L_{-\nVdash} \dots \supsetneq f$$

satisfaisant à

$$L_{\nvdash} F \quad \nleftrightarrow \subsetneq h \nsupseteq n \supsetneq F$$

$$L_m F \quad \nleftrightarrow \nvdash \quad m > \nvdash$$

Ici ϕ est un polynôme de “degré” n (si on attribue à L_{-p} le degré $p\supsetneq$ dont l'expression est unique — à facteur global près — lorsque on ordonne les monômes par indices non décroissants, (comme dans la définition de $f_{p_{\nVdash}, p_{\nvDash}, \ldots}\supsetneq$.

Paramétrisons la charge centrale sous la forme

$$c \nleftrightarrow \nVdash \nsupseteq \ntriangleleft \subsetneq \theta \nsupseteq \theta^{-\nVdash} \supsetneq^{\nvDash} \equiv \nVdash\nVdash \nsupseteq \ntriangleleft \subsetneq t \nsupseteq t^{-\nVdash} \supsetneq \qquad t \nleftrightarrow \theta^{\nvDash}$$

et considérons pour $j, j' \geq \nvdash$ entiers ou demi-entiers la suite dénombrable des poids conformes

$$h_{j',j} \nleftrightarrow - \subsetneq j\theta \nsupseteq j'\theta^{-\nVdash} \supsetneq \subsetneq \subsetneq j \nsupseteq \nVdash \supsetneq \theta \nsupseteq \subsetneq j' \nsupseteq \nVdash \supsetneq \theta^{-\nVdash} \supsetneq$$

Il est clair que c et $h_{j,j'}$ ne dépendent que de t. Enfin soit $n \nleftrightarrow \subsetneq \nvDash j \nsupseteq \nVdash \supsetneq \subsetneq \nvDash j' \nsupseteq \nVdash \supsetneq$. On a le résultat fondamental suivant

Proposition 3.1 (Kac, Feigin et Fuchs)

Pour $c, h_{j,j'}, n$ définis ci-dessus, $V\subsetneq c, h\supsetneq$ admet un vecteur singulier au niveau n, et tous les vecteurs singuliers sont obtenus de cette façon.

Pour tout triplet $\subsetneq t, j, j'\supsetneq$ notre but est d'obtenir un algorithme fournissant le polynôme $\phi\subsetneq L\supsetneq$ dont on verra d'ailleurs qu'il est défini sur $\mathbb{Q}\subsetneq t\supsetneq$.

Remarques.

1) Les valeurs limites θ (ou $t\supsetneq$ égal à 0 ou ∞ sont inclues dans un sens limite pour $j' \nleftrightarrow \nvdash$ et $j \nleftrightarrow \nvdash$ respectivement, cas où la charge centrale tend vers l'infini. En un sens qui mériterait d'être précisé ceci correspond à une limite classique.

2) Les notations ci-dessus pour c et h sont commodes pour la discussion qui va suivre. Les notations plus standard sont telles que (pour m générique)

$$r \nleftrightarrow \nvDash j' \nsupseteq \nVdash \qquad s \nleftrightarrow \nvDash j \nsupseteq \nVdash \qquad t \nleftrightarrow \theta^{\nvDash} \nleftrightarrow -\frac{m}{m \nsupseteq \nVdash}$$

$$c \nleftrightarrow \nVdash - \frac{\ntriangleleft}{m\subsetneq m \nsupseteq \nVdash \supsetneq} \qquad h \nleftrightarrow \frac{\subsetneq r \subsetneq m \nsupseteq \nVdash \supsetneq - sm \supsetneq^{\nvDash} - \nVdash}{\ntrianglelefteq m \subsetneq m \nsupseteq \nVdash \supsetneq} \qquad n \nleftrightarrow rs$$

En particulier (Friedan et Shenker) les seules représentations unitarisables (après réduction des modules de Verma correspondants) pour $c < \nVdash$ correspondent à m entier non négatif et r et s entiers positifs respectivement inférieurs à m et $m \nsupseteq \nVdash$.

3) Pour des petites valeurs n on peut obtenir $\phi\subsetneq L\supsetneq$ en utilisant directement sa définition. Les premiers à avoir donné une formule générale pour une sous-famille de vecteurs singuliers dans le cas $jj' \nleftrightarrow \nvdash$ sont Benoît et Saint Aubin.

Avant de poursuivre il est bon de mentionner trois propriétés générales des polynômes $\phi\subsetneq L\supsetneq$ obtenues par Feigin et Fuchs.

(i) $\phi\subsetneq L\supsetneq$ est une série de Laurent finie dans la variable t et l'on a

$$t \longrightarrow \nvdash \quad \phi_{j',j} \subsetneq L \supsetneq \sim \subsetneq L_{-\subsetneq \nvDash j' \not\supseteq \nVdash \supsetneq} \supsetneq^{\nvDash j \not\supseteq \nVdash}$$

$$t \longrightarrow \infty \quad \phi_{j',j} \subsetneq L \supsetneq \sim \subsetneq L_{-\subsetneq \nvDash j \not\supseteq \nVdash \supsetneq} \supsetneq^{\nvDash j' \not\supseteq \nVdash}$$

Normalisant ϕ par $L^n_{-\nVdash} \not\supseteq$ ... Feigin et Fuchs ajoutent la conjecture que dans la transformation $t \longrightarrow -t \subsetneq c \longrightarrow \nvDash \ntriangleleft - c \supsetneq \; L_{-k} \longrightarrow \subsetneq - \supsetneq^k L_{-k}$, $\phi \subsetneq L, t \supsetneq$ reste invariant.

(ii) Pour tout entier $k > \nvdash$ la sous algèbre engendrée par $L_{-m}, m \geq k$ est localement nilpotente. Soit U_{-k} son algèbre enveloppante $U_{-\nVdash} \supset U_{-\nvDash} \supset U_{-\nVdash} \ldots$. L'algèbre $U_{-\nVdash}$ mod $U_{-\nvDash}$ est commutative et engendrée par $L_{-\nVdash}$, $U_{-\nVdash}$ mod $U_{-\nVdash}$ est aussi commutative à deux générateurs $L_{-\nVdash}, L_{-\nvDash}, U_{-\nVdash}$ mod $U_{-\not\supseteq}$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg... A normalisation près on a évidemment $\phi_{j',j} \subsetneq L \supsetneq \sim L^n_{-\nVdash}$ mod $U_{-\nvDash}$. Soit $\sigma_{j',j} \subsetneq L_{-\nVdash}, L_{-\nvDash} \supsetneq$ la projection de $\phi_{j',j} \subsetneq L \supsetneq$ mod $U_{-\nVdash}$. C'est un polynôme commutatif en $L_{-\nVdash}$ et $L_{-\nvDash}$ et l'on a la factorisation

$$\sigma^{\nvDash}_{j',j} \subsetneq L_{-\nVdash}, L_{-\nvDash} \supsetneq \nleftrightarrow \prod_{\substack{-j \leq M \leq j \\ -j' \leq M' \leq j'}} \frown L^{\nvDash}_{-\nVdash} \not\supseteq \not\supseteq \subsetneq M\theta \not\supseteq M'\theta^{-\nVdash} \supsetneq^{\nvDash} L_{-\nvDash} \frown$$

Dans ce produit $M \equiv j$ mod $\nVdash$ (respectivement $M' \equiv j'$ mod $\nVdash \supsetneq$ et le membre de droite est évidemment un carré.

(iii) L'algèbre de Virasoro est une extension centrale de l'algèbre de Witt (correspondant à $c \nleftrightarrow \nvdash \supsetneq$ engendrée par les ℓ_m tels que $\frown \ell_m, \ell_n \frown \nleftrightarrow \subsetneq m - n \supsetneq \ell_{m \not\supseteq n}$.

Cette dernière admet une famille de représentations (qui ne sont pas de plus haut poids) indexées par des paires $\subsetneq \lambda, \mu \supsetneq$ telles que l'action sur une base de vecteurs $\psi_\rho \ \rho \in Z$ prend la forme

$$\ell_{-k}\psi_\rho \nleftrightarrow \frown \mu \not\supseteq \rho - \lambda \subsetneq k - \nVdash \supsetneq \frown \psi_{\rho \not\supseteq k}$$

Par exemple si $\psi_\rho \longrightarrow z^{-\rho-\mu}$ $\qquad \ell_{-k} \longrightarrow -z^{-k} \subsetneq z\frac{d}{dz} \not\supseteq \lambda \subsetneq k - \nVdash \supsetneq \supsetneq$. Dans la substitution $L_{-k} \longrightarrow \ell_{-k}$ on a alors

$$\phi_{j',j} \subsetneq \ell \supsetneq \psi_{\nvdash} \nleftrightarrow \varphi_{j',j} \subsetneq \lambda, \mu \supsetneq \psi_n$$

Posant

$$A \subsetneq M, M' \supsetneq \nleftrightarrow [\subsetneq j \not\supseteq M \supsetneq \theta \not\supseteq \subsetneq j \not\supseteq M' \supsetneq \theta^{-\nVdash}] \, [\subsetneq j \not\supseteq \nVdash - M \supsetneq \theta \not\supseteq \subsetneq j' \not\supseteq \nVdash - M' \supsetneq \theta^{-\nVdash}]$$

le polynôme $\varphi_{j',j}$ est donné par l'expression

$$\varphi^{\nvDash}_{j',j} \subsetneq \lambda, \mu \supsetneq \nleftrightarrow \prod_{\substack{-j \leq M \leq j \\ -j \leq M' \leq j'}} \subsetneq M \not\supseteq A \subsetneq M, M' \supsetneq \subsetneq M \not\supseteq A \subsetneq -M, -M' \supsetneq - \not\supseteq \lambda \subsetneq M\theta \not\supseteq M'\theta^{-\nVdash} \supsetneq^{\nvDash} \supsetneq$$

où à nouveau le nombre de droite est un carré.

4. La relation entre les sections précédentes va maintenant apparaître. En effet "moralement" l'opérateur $L_{-\nVdash}$ est l'équivalent d'un opérateur de différentiation, de sorte que $\phi_{j',j} \subsetneq L \supsetneq$ est en quelque sorte un opérateur différentiel du n-ième ordre mais à coefficients non-commutatifs. Cette analogie va apparaître de manière frappante si nous envisageons d'abord le cas traité par Benoît et Saint Aubin où $jj' \nLeftrightarrow \nvdash$. On se contentera de présenter le cas $j' \nLeftrightarrow \nvdash \subsetneq r \nLeftrightarrow \nVdash \supsetneq$, l'autre s'en déduisant simplement en changeant $j \longrightarrow j'$ et $t \longrightarrow t^{-\nVdash}$. On a donc

$$c \nLeftrightarrow \nVdash\nvDash \nsupseteq \ntriangleleft \subsetneq t \nsupseteq t^{-\nVdash} \supsetneq \qquad h \nLeftrightarrow -j - tj \subsetneq j \nsupseteq \nVdash \supsetneq \qquad n \nLeftrightarrow \nvDash j \nsupseteq \nVdash,$$

où $j \nLeftrightarrow \frac{\nVdash}{\nvDash}, \nVdash, \frac{\nVdash}{\nvDash}, \ldots$ Nous allons définir dans $V \subsetneq c, h \supsetneq$ une suite de vecteurs $f \equiv f_{-j}, f_{-j \nsupseteq \nVdash} \ldots, f_j, f_{j \nsupseteq \nVdash} \equiv F$ où f_{-j} est le vecteur de plus haut poids et $f_{j \nsupseteq \nVdash}$ est le vecteur singulier F, tels que

$$L_{\nvdash} f_M \nLeftrightarrow \subsetneq h \nsupseteq j \nsupseteq M \supsetneq f_M$$

Groupons ces éléments de $V \subsetneq c, h \supsetneq$ en deux colonnes

$$\mathbf{f} \quad \equiv \subsetneq f_j, f_{j-\nVdash}, \ldots, f_{-j} \supsetneq^T$$

$$\mathbf{F} \quad \equiv \subsetneq F, \nvdash, \ldots, \nvdash \supsetneq^T$$

Alors

Proposition 4.1

(1) L'équation

$$\mathbf{F} \nLeftrightarrow \subsetneq -J_- \nsupseteq \sum_{k \nLeftrightarrow \nvdash}^{n-\nVdash} L_{-k-\nVdash} t^k J_{\nsupseteq}^k \supsetneq \mathbf{f}$$

définit $F \nLeftrightarrow f_{j \nsupseteq \nVdash}$ en termes de $f \equiv f_{-j}$, où F est un vecteur singulier non nul de $V \subsetneq c, h \supsetneq$ au niveau $n \nLeftrightarrow \nvDash j \nsupseteq \nVdash$, c'est-à-dire

$$p > \nvdash \qquad L_p F \nLeftrightarrow \nvdash \qquad L_{\nvdash} F \nLeftrightarrow \subsetneq h \nsupseteq n \supsetneq F$$

(ii) En outre pour tout $p > \nvdash$

$$L_p \mathbf{f} \nLeftrightarrow \left[\subsetneq J_{\nvdash} - \frac{\nVdash p \nsupseteq \nVdash}{\nvDash} \supsetneq - t^{-\nVdash} \frac{\nVdash p \nsupseteq \nVdash}{\ntrianglerighteq} \right] \subsetneq t J_{\nsupseteq} \supsetneq^p \mathbf{f}$$

En résolvant explicitement la récurrence impliquée par la proposition on obtient la formule de Benoît Saint-Aubin

$$\phi_{\nvdash, j} \subsetneq L \supsetneq \nLeftrightarrow \sum_{\substack{⫐⟍≈⊐≈⊐⋊⋉\sim \ \ltimes \\ n \nLeftrightarrow p_{\nVdash} \nsupseteq \ldots p_r \nRightarrow r, p_i > \nvdash}} t^{n-r} \frac{\subsetneq n - \nVdash \supsetneq \supsetneq^{\nvDash}}{\prod_{i \nLeftrightarrow \nVdash}^{r-\nVdash} [\subsetneq p_{\nVdash} \nsupseteq \ldots \nsupseteq p_i \supsetneq \subsetneq n - p_{\nVdash} - \ldots - p_i \supsetneq]} L_{-p_{\nVdash}} \ldots L_{-p_r}$$

où les p_i ne sont pas ordonnés.

La preuve est une vérification directe. En outre, on peut montrer que ϕ possède les trois propriétés générales attendues.

Quoiqu'on observe un parallélisme frappant avec la discussion de la section 2 sous la substitution $d \longrightarrow L_{-\nVdash}$, $w_k \longrightarrow t^{k-\nVdash} L_{-k}$, $k \geq \nvDash$, il reste à en trouver l'origine. C'est ce que va éclairer la formulation de la "fusion" des modules, substitut dans ce contexte de la décomposition des produits tensoriels. En effet d'une part la connaissance de toutes les applications $V \subsetneq c, h \nsupseteq n \supsetneq \longrightarrow V \subsetneq c, h \supsetneq$

permet par passage au quotient de construire les modules irréductibles de plus haut poids. Par ailleurs connaissant par la méthode précédente une sous famille de tels modules il est naturel d'essayer d'en engendrer d'autres par réduction de produits. Cependant on se heurte d'emblée à une difficulté. La charge centrale relative à un tel produit est la somme des charges des facteurs. La fusion est précisément une construction qui conserve la charge centrale et permet la construction des vecteurs singuliers généraux. Comme on va le voir elle s'appuie sur la signification géométrique de l'algèbre de Virasoro.

5. La fusion des modules de plus haut poids a été introduite dans le travail fondamental de Belavin Polyakov et Zamolodchikov comme transcription dans le cadre conforme du produit à courte distance des opérateurs de champs. Nous allons en donner ici une version précise adaptée à notre problème.

Dans tout ce qui suit la charge centrale c est fixée et à tout point d'un ouvert de la sphère de Riemann nous attachons une algèbre de Virasoro (de charge c) et l'ensemble de ses modules irréductibles. Ces données "adéliques" sont codées dans des champs, le tenseur impulsion énergie $T(x)$ et les champs "primaires" $\varphi_h(x)$. Ces quantités sont à interpréter comme des symboles figurant dans des fonctions de corrélation (que nous considérons dans tout ce qui suit sur la sphère de Riemann mais les propriétés locales que nous développons seraient inchangées sur une surface de Riemann quelconque). Pour alléger les notations nous désignons toute suite finie non décroissante d'entiers positifs $1 \leq r_1 \leq r_2 \ldots \leq r_k$ par le symbole Y, avec $|Y| = r_1 + \ldots + r_k$ et nous posons $L_{-r_1} \ldots L_{-r_k} \equiv L_{-Y}$. Soit $f_h(x)$ un champ primaire "évalué au point x". Nous l'associons au vecteur de plus haut poids d'un module $V(c,h)$ associé au point x et nous associons de même ses "descendants" $L_{-Y} f_h(x)$ à l'action de l'algèbre de Virasoro, où il est entendu qu'on opère avec l'algèbre de Virasoro en x. Cette action est engendrée par l'itération du produit à courte distance avec le tenseur impulsion énergie

$$T(\xi) f_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - x)^{n-2} L_{-n} f_h(x)$$

où

$$L_0 f_h(x) = h f_h(x) \qquad L_{-1} f_h(x) = \frac{d}{dx} f_h(x)$$

et la définition précédente implique la propriété de plus haut poids $L_p f_h(x) = 0$ pour $p > 0$. La caractéristique à noter est que L_{-1} agit comme dérivation et relie donc les propriétés en des points voisins. Ceci fournit donc une condition de cohérence entre modules attachés à des points distincts.

Soient maintenant trois champs f_0, f_1 et f de poids respectifs h_0, h_1, et h, la fusion des modules correspondants sera définie s'il est possible de trouver une fonction de corrélation

$$\langle f_0(x_0) f_1(x_1) f(x) \rangle = \frac{g(h_0, h_1, h)}{(x_0 - x_1)^{h_0 + h_1 - h} (x_0 - x)^{h_0 + h - h_1} (x_1 - x)^{h_1 + h - h_0}}$$

non nulle, c'est-à-dire telle que $g(h_0, h_1, h) \neq 0$. Un lecteur scrupuleux observera que fixant x_0 et x_1 par exemple la quantité ci-dessus est en réalité définie sur le recouvrement universel de l'ouvert moins les points x_0 et x_1. Comme nous allons le voir les "règles de fusion" vont en fait émerger de la théorie.

Pour être précis nous distinguerons le module de Verma $V(c,h)$ de son quotient irréductible $M(c,h)$ (qui peut ou non se confondre avec $V(c,h)$) et nous définirons la fusion entre modules irréductibles comme une application linéaire *covariante*

$$\mathcal{F} \quad M\subsetneq c, h_{\nvdash}\nRightarrow x_{\nvdash}\supsetneq \otimes M\subsetneq c_{\nVdash}, h_{\nVdash}\nRightarrow x_{\nVdash}\supsetneq \longrightarrow M\subsetneq c, h\nRightarrow x\supsetneq$$

La nécessité de prendre des modules irréductibles découlera par la suite de la condition de rendre $\mathcal{F}$ bien défini. La fusion se différencie de la décomposition du produit tensoriel par l'introduction des arguments $x_{\nvdash}, x_{\nVdash}, x$ de sorte que nous traitons des algèbres isomorphes mais non pas identiques. En plus de la linéarité, le mot clef de la définition, que nous allons étudier en détail, est "covariant". Ceci signifie que notre application doit être indépendante du choix du paramètre local utilisé (à transformation univalente près). On va voir que cette contrainte est si forte qu'elle détermine entièrement la fusion (à un facteur global près). C'est à ce point que nous retrouverons le rôle de la géométrie comme dans la section 2.

Par linéarité l'image du produit des vecteurs de plus haut poids a le développement

$$\mathcal{F}\frown f_{\nvdash}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq \otimes f_{\nVdash}\subsetneq x_{\nVdash}\supsetneq\frown \nleftrightarrow \sum_{Y} z^{|Y|-\subsetneq h_{\nvdash}\nsupseteq h_{\nVdash}-h\supsetneq}\beta_Y L_{-Y} f\subsetneq x\supsetneq$$

On a supposé pour simplifier que $x_{\nvdash}\nleftrightarrow x\nsupseteq\frac{z}{\nVdash}$, $xy\nleftrightarrow x-\frac{z}{\nVdash}$. Ce choix n'est en rien indispensable et l'on pourra s'en affranchir en tenant compte de $f\subsetneq x\nsupseteq x'\supsetneq\nleftrightarrow e^{x'L_{\nVdash}}f\subsetneq x\supsetneq$. Le facteur en puissance de z résulte de la propriété d'échelle globale. Supposant connus les coefficients numériques β_Y, l'application $\mathcal{F}$ sera entièrement définie par la donnée de l'action de $\mathcal{F}\subsetneq L_{-p}\otimes\nVdash\supsetneq$ et $\mathcal{F}\subsetneq\nVdash\otimes L_{-p}\supsetneq$. Cette dernière résulte "d'identités de Ward" satisfaite par les corrélations qui expriment que les champs primaires $f_i\subsetneq x\supsetneq$ appartiennent aux espaces $\mathcal{F}_{h_i}$ et que le tenseur impulsion énergie est le générateur des transformations infinitésimales de coordonnée. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\subsetneq L_{-p}\otimes\nVdash\supsetneq &\nleftrightarrow \tfrac{\subsetneq-\nVdash\supsetneq^{p}}{z^{p}}\left[h_{\nVdash}\subsetneq p-\nVdash\supsetneq\nsupseteq\tfrac{z}{\nVdash}L_{-\nVdash}-z\tfrac{d}{dz}\right]\nsupseteq\textstyle\sum_{k\geq\nvdash}\subsetneq\frac{z}{\nVdash}\supsetneq^{k}\binom{k\nsupseteq p-\nvdash}{k}L_{-p-k}\\
\mathcal{F}\subsetneq\nVdash\otimes L_{-p}\supsetneq &\nleftrightarrow \tfrac{\nVdash}{z^{p}}\left[h_{\nvdash}\subsetneq p-\nVdash\supsetneq-\tfrac{z}{\nVdash}L_{-\nVdash}-z\tfrac{d}{dz}\right]\nsupseteq\textstyle\sum_{k\geq\nvdash}\left(\frac{-z}{\nVdash}\right)^{k}\binom{k\nsupseteq p-\nvdash}{k}L_{-p-k}
\end{aligned}$$

Remarques

1) Pour $p\nleftrightarrow\nVdash$ les sommes sur k se réduisent à leur premier terme (formellement $\binom{-\nVdash}{\nvdash}\nleftrightarrow\nVdash\supsetneq$ donc $\mathcal{F}\subsetneq L_{-\nVdash}\otimes\nVdash\supsetneq\nleftrightarrow\frac{d}{dz}\nsupseteq\frac{\nVdash}{\nVdash}L_{-\nVdash}$ et $\mathcal{F}\subsetneq\nVdash\otimes L_{-\nVdash}\supsetneq\nleftrightarrow-\frac{d}{dz}\nsupseteq\frac{\nVdash}{\nVdash}L_{-\nVdash}$.

2) Les identités de Ward auxquelles on a fait allusion prennent la forme

$$\langle\subsetneq L_{-p_{\nVdash}}\ldots L_{-p_r}f_{\nvdash}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq\supsetneq f_{\nVdash}\subsetneq x_{\nVdash}\supsetneq\ldots\rangle\nleftrightarrow\mathcal{L}_{-p_{\nVdash}}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq\mathcal{L}_{-p_{\nvDash}}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq\ldots\langle f_{\nvdash}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq f_{\nVdash}\subsetneq x_{\nVdash}\supsetneq\ldots\rangle$$

où

$$\mathcal{L}_{-p}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq\nleftrightarrow\sum_{i>\nvdash}\left(\frac{\subsetneq p-\nVdash\supsetneq h_i}{\subsetneq x_i-x_{\nvdash}\supsetneq^{p}}-\frac{\nVdash}{\subsetneq x_i-x_{\nvdash}\supsetneq^{p-\nVdash}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

ce qui, entre parenthèse, montre comment, lorsqu'on aura l'expression d'un vecteur singulier sous la forme $\phi\subsetneq L\supsetneq f$, on obtiendra en l'annulant (dans un module irréductible) des équations différentielles pour les corrélations du champ correspondant.

Pour $x_{\nvdash}$ voisin de x on obtient un développement

$$\mathcal{L}_{-p}(x_0) = \left(-\frac{1}{z}\right)^p \left[(p-1)h_1 + \frac{1}{2} z\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial z}\right]$$
$$+ \sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^k \binom{p+k-2}{k} \sum_{i>1}(-1)^{p+k}\left[\frac{h_i(p+k-1)}{(x-x_i)^{p+k}} + \frac{1}{(x-x_i)^{p+k-1}}\partial_i\right]$$

Identifiant $\frac{\partial}{\partial x}$ à l'action de L_{-1} et la dernière somme à celle de L_{-p-k} sur le champ obtenu par fusion de $f_0(x_0)\otimes f_1(x_1)$ on obtient l'expression de $\mathcal{F}(L_{-p}\otimes 1)$ et de même pour $\mathcal{F}(1\otimes L_{-p})$. On vérifiera que l'on a bien

$$[\mathcal{F}(L_{-m}\otimes 1), \mathcal{F}(L_{-n}\otimes 1)] = (n-m)\mathcal{F}(L_{-m-n}\otimes 1)$$

pour $m,n>0$ et de même lorsque on échange les rôles des deux facteurs.

3) On passe de $\mathcal{F}(L_{-p}\otimes 1)$ à $\mathcal{F}(1\otimes L_{-p})$ par l'échange $h_0 \longleftrightarrow h_1$ $z\longleftrightarrow -z$. Cette symétrie résulte du choix du point de fusion.

4) Dans la limite $z\longrightarrow 0$ on obtient

$$\lim_{z\longrightarrow 0} z^{-h}\mathcal{F}(z^{h_0}f_0(x_0)\otimes z^{h_1}f_1(x_1)) \longrightarrow f(x)$$

vecteur de plus haut poids dans $M(c,h;x)$, ce qui est compatible avec le fait que dans la limite considérée $(x_0-x_1)^h f(\frac{x_0+x_1}{2})$ se comporte comme $dx^h f(x)$. En outre nous voyons que le terme dominant dans le développement à courte distance du produit de deux champs primaires est toujours un champ primaire, remarque utile dans la suite.

Pour déterminer les coefficients β_Y nous exprimons que la fusion est indépendante du choix de coordonnée. Soit donc $x\longrightarrow \tilde{x}$ un tel changement, on doit donc avoir

$$\sum z^{|Y|-(h_0+h_1-h)}\beta_Y(L_{-Y}f)(x) = \left(\frac{d\tilde{x}_0}{dx_0}\right)^{h_0}\left(\frac{d\tilde{x}_1}{dx_1}\right)^{h_1}\times$$
$$\sum_Y(\tilde{x}_0-\tilde{x}_1)^{|Y|-(h_0+h_1-h)}\beta_Y(L_{-Y}\tilde{f})\left(\frac{\tilde{x}_0+\tilde{x}_1}{2}\right)$$

Comme précédemment $x_0 = x+\frac{z}{2}$, $x_1 = x-\frac{z}{2}$ et

$$(L_{-Y}\tilde{f})\left(\frac{\tilde{x}_0+\tilde{x}_1}{2}\right) = L_{-Y}\circ\left[\left(\frac{\tilde{x}_0+\tilde{x}_1}{2}\right)-\tilde{x})L^{2}_{-1}\right]\tilde{f}(\tilde{x})$$

Si y désigne la coordonnée générique et si on pose

$$\tilde{y} = y-\epsilon(y)$$

la condition précédente se traduit sous forme infinitésimale par

$$\left\{h_0\epsilon'(x_0)+\epsilon(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0}+h_1\epsilon'(x_1)+\epsilon(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}\sum_Y z^{|Y|-(h_0+h_1-h)}\beta_Y L_{-Y}f(x)$$
$$= \sum_Y z^{|Y|-(h_0+h_1-h)}\beta_Y\delta_\epsilon[L_{-Y}f(x)]$$

Choisissons alors

$$\epsilon(y) = \epsilon_k(y-x)^{k+1} \qquad\qquad k+1\geq 0$$

de telle sorte que

$$\delta_\epsilon(L_{-Y} f)(x) = \epsilon_k (L_k L_{-Y} f)(x)$$

Nous obtenons alors pour tout $k \geq -1$

$$\left[L_k - \left(\tfrac{z}{2}\right)^k (k+1)(h_0 + (-1)^k h_1) - \left(\tfrac{z}{2}\right)^{k+1} \left\{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2} \frac{\partial}{\partial x} + (1 + (-1)^k) \frac{\partial}{\partial z}\right\}\right] \times$$
$$\sum_Y z^{|Y|-(h_0+h_1-h)} \beta_Y L_{-Y} f(x) = 0$$

Il suffit d'écrire la condition précédente pour L_1 et L_2 puisqu'on peut engendrer tous les L_k, $k > 0$ par commutation

$$L_{k+2} = \frac{(-1)^k}{k!} (\mathrm{ad}\, L_1)^k L_2$$

Si on note pour simplifier

$$f^{(p)} \equiv \sum_{|Y|=p} \beta_Y L_{-Y} f \qquad\qquad p \geq 0$$

avec $f^{(0)} = f$ et la convention que $f^{(p)}$ s'annule pour $p < 0$, on aboutit aux conditions récursives qui achèvent de déterminer la fusion

$$\begin{aligned} L_1 f^{(p)} &= (h_0 - h_1) f^{(p-1)} + \tfrac{1}{4} L_{-1} f^{(p-2)} \\ L_2 f^{(p)} &= \frac{h+p+2(h_0+h_1-1)}{4} f^{(p-2)} \end{aligned}$$

Si $p = 1$ on retrouve le fait que f doit être de plus haut poids. En décomposant $f^{(p)}$ sur la base des $L_{-Y} f$ et en utilisant les équations de commutation de l'algèbre de Virasoro on constate que ces équations déterminent récursivement $f^{(p)}$ en résolvant à chaque étape un système linéaire $P(p) \times P(p)$ où $P(n)$ est le nombre de partitions de n. Le déterminant de ce système est le déterminant de Kac à ce niveau. Si aucun déterminant de Kac ne s'annule $V(c,h) \equiv M(c,h)$ est irréductible, c'est-à-dire ne possède aucun vecteur singulier. En revanche supposons $V(c,h)$ réductible, c'est-à-dire que $M(c,h)$ est obtenu en quotentiant $V(c,h)$ par des sous-modules engendrés par des vecteurs singuliers. En cherchant à résoudre le système ci-dessus de manière récursive on atteindra un niveau n supérieur ou égal à p où p est le niveau d'un vecteur singulier, et le mieux qu'on puisse espérer est que $f^{(n)}$ soit déterminé modulo des "descendants" du vecteur singulier, en sorte que le déterminant de Kac doit s'annuler. Ceci justifie le fait que pour rendre la fusion bien définie il faut donc quotienter par les sous-modules invariants. Reste encore à s'assurer que lorsqu'on est dans le cas décrit ci-dessus le système linéaire admet des solutions, c'est-à-dire que le membre de droite est dans l'image de l'opérateur linéaire du membre de gauche. Ceci engendre *les règles de fusion* qui imposent des conditions algébriques sur les quadruplets (c, h_0, h_1, h).

Donnons un exemple élémentaire. On trouve aisément $f^{(1)} = \frac{h_0 - h_1}{2h} L_{-1} f$ si $h \neq 0$. Au niveau 1 le déterminant de Kac est proportionnel à h. Si $h = 0$ on en déduit qu'on doit avoir $h_0 = h_1$. Donc deux modules ne peuvent contenir le module du "vide" $(h = 0)$ que s'ils sont de poids égaux, condition nécessaire pour que la fonction de corrélation à deux points correspondante puisse être différente de zéro. On peut en général analyser niveau par niveau ces règles de fusion.

6. Avec les données précédentes nous sommes maintenant en mesure de donner une construction générale des vecteurs singuliers. Considérons la fusion $\mathcal{F}(M(c, h_0) \otimes M\left(c, h_1\right))$ dans le cas où l'un au moins des modules de Verma correspondant possède un vecteur singulier. Par exemple $\phi_0(L) f_0$

est un vecteur singulier dans $V\subsetneq c, h_{\nvdash}\supsetneq$ c'est-à-dire un nouveau champ primaire de poids $h_{\nvdash} \nsupseteq n_{\nvdash}$. Partant de

$$\mathcal{F}\subsetneq f_{\nvdash}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq \otimes f_{\nvDash}\subsetneq x_{\nvDash}\supsetneq\supsetneq \nleftrightarrow \sum_{r\geq\nvdash} z^{r-\subsetneq h_{\nvdash}\nsupseteq h_{\nvDash}-h\supsetneq} f^{\subsetneq r\supsetneq}$$

où $f^{\subsetneq\nvdash\supsetneq} \equiv f$, on en déduirait

$$\mathcal{F}\subsetneq\subsetneq\phi_{\nvdash} f_{\nvdash}\subsetneq x_{\nvdash}\supsetneq \otimes f_{\nvDash}\subsetneq x_{\nvDash}\supsetneq\supsetneq \nleftrightarrow \sum_{r} z^{r-\subsetneq h_{\nvdash}\nsupseteq h_{\nvDash}-h\nsupseteq n_{\nvdash}\supsetneq} \psi^{\subsetneq r\supsetneq}$$

dont le terme dominant dominant $\psi^{\subsetneq\nvdash\supsetneq}$ est donné par l'expression

$$\psi^{\subsetneq\nvdash\supsetneq} \nleftrightarrow \subsetneq -\nVdash\supsetneq^{n_{\nvdash}} z^{h_{\nvdash}\nsupseteq h_{\nvDash}-h\nsupseteq n_{\nvdash}}\, \phi_{\nvdash}\subsetneq L_{-k} \longrightarrow \ell_{-k}\subsetneq -h_{\nvDash}, h_{\nvdash} \nsupseteq h_{\nvDash} - h\supsetneq\supsetneq\ \subsetneq z^{h-h_{\nvdash}-h_{\nvDash}} f\supsetneq$$

où les générateurs de l'algèbre de Witt $\ell_{-k}\subsetneq\lambda, \mu\supsetneq$ définis dans la section 3,

$$\ell_{-k}\subsetneq\lambda, \mu\supsetneq \nleftrightarrow -\frac{\nVdash}{z^k}\subsetneq\lambda\subsetneq k-\nVdash\supsetneq \nsupseteq z\frac{\partial}{\partial z}\supsetneq$$

agissent sur les vecteurs de base $z^{-p-\mu}$. En particulier avec les notations de cette section

$$\psi^{\subsetneq\nvdash\supsetneq} \nleftrightarrow \subsetneq -\nVdash\supsetneq^{n_{\nvdash}} \varphi_{j'_{\nvdash}, j_{\nvdash}}\subsetneq\lambda, \mu\supsetneq f \qquad \lambda \nleftrightarrow -h_{\nvDash} \qquad \mu \nleftrightarrow h_{\nvdash} \nsupseteq h_{\nvDash} - h$$

où $\varphi_{j'_{\nvdash}, j_{\nvdash}}\subsetneq\lambda, \mu\supsetneq$ est un polynôme en $\subsetneq\lambda, \mu\supsetneq$. Nous en déduisons le résultat préliminaire suivant

Proposition 6.1

Supposons $\varphi_{j'_{\nvdash}, j_{\nvdash}}\subsetneq -h_{\nvDash}, h_{\nvdash} \nsupseteq h_{\nvDash} - h\supsetneq \nleftrightarrow \nvdash$, alors

(i) Le module $M\subsetneq c, h\supsetneq$ ne peut apparaître comme fusion de $M\subsetneq c, h_{\nvdash} \nsupseteq n_{\nvdash}\supsetneq \otimes M\subsetneq c, h_{\nvDash}\supsetneq$

(ii) et comme le premier terme non nul $\psi^{\subsetneq r\supsetneq}$, $r > \nvdash$, dans le développement de $\mathcal{F}\subsetneq\phi_{\nvdash} f_{\nvdash} \otimes f_{\nvDash}\supsetneq$ doit être un vecteur de plus haut poids, il est un vecteur singulier de $V\subsetneq c, h\supsetneq$ au niveau r.

On aurait un résultat analogue en échangeant les rôles de $f_{\nvdash}$ et $f_{\nvDash}$. Explicitons d'abord sur un cas particulier le mécanisme impliqué par la proposition en retrouvant par cette méthode la famille de vecteurs singuliers de la proposition $\ntrianglerighteq.\nVdash$.

Prenons $h_{\nvdash} \nleftrightarrow h_{\frac{\nVdash}{\nvDash},\nvdash} \nleftrightarrow -\frac{\nVdash}{\nvDash} - \frac{\nVdash}{\ntrianglerighteq t}$, $h \nleftrightarrow h_{\nvdash,j} \nleftrightarrow -j - tj\subsetneq j \nsupseteq \nVdash\supsetneq$. Alors pour $\lambda \nleftrightarrow -h_{\nvDash}$, $\mu \nleftrightarrow h_{\nvdash} \nsupseteq h_{\nvDash} - h$

$$\varphi_{\frac{\nVdash}{\nvDash},\nvdash}\subsetneq\lambda, \mu\supsetneq \nleftrightarrow \mu\subsetneq\mu \nsupseteq \nVdash \nsupseteq \frac{\nVdash}{t}\supsetneq - \frac{\lambda}{t} \nleftrightarrow \nvdash$$

admet deux solutions en $h_{\nvDash}$. Choisissons

$$h_{\nvDash} \nleftrightarrow \frac{\nVdash}{\nvDash} \nsupseteq \frac{\nVdash}{\ntrianglerighteq t} - j\subsetneq j \nsupseteq \nVdash\supsetneq t$$

qui est tel que pour t générique $V\subsetneq c, h_{\nvDash}\supsetneq$ soit irréductible. Il se trouve que symboliquement $h_{\nvDash} \nleftrightarrow h_{-\frac{\nVdash}{\nvDash},j}$ où on a substitué dans $h_{j',j}$ la valeur — non permise — $j' \nleftrightarrow -\frac{\nVdash}{\nvDash}$. Examinons la fusion

$$\subsetneq\frac{\nVdash}{\nvDash}, \nvdash\supsetneq \otimes \subsetneq -\frac{\nVdash}{\nvDash}, j\supsetneq \xrightarrow{\mathcal{F}} \subsetneq\nvdash, j\supsetneq$$

Dans $V\subsetneq c, h_{\nvdash}\supsetneq$ il existe d'après la théorie générale un vecteur singulier au niveau 2 et c'est un exercice élémentaire que de l'expliciter, sans même faire appel à la section 4. On trouve

$$\phi_{\frac{\nVdash}{\nvDash},\nvdash} \nleftrightarrow L_{-\nVdash}^{\nvDash} \nsupseteq \frac{\nVdash}{t} L_{-\nvDash}$$

Il est commode dans ce cas de choisir le point de fusion en $x_{\nVdash}$ plutôt que $\frac{x_{\nvdash} \nsupseteq x_{\nVdash}}{\nvDash}$. On a alors

$$\mathcal{F}\subsetneq L_{-\nVdash} \otimes \nVdash\supsetneq \nleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} \qquad \mathcal{F}\subsetneq L_{-\nvDash} \otimes \nVdash\supsetneq \nleftrightarrow \frac{h_{\nVdash}}{z^{\nvDash}} - \frac{\nVdash}{z}\frac{\partial}{\partial z} \nsupseteq \sum_{k \nleftrightarrow \nVdash}^{\infty} z^{k-\nvDash} L_{-k}$$

Demandons que $M\subsetneq c, h_{\nvdash}\supsetneq$ soit irréductible $\subsetneq \phi_{\nvdash} f_{\nvdash} \not\approx \nvdash\supsetneq$ et transférons l'action de $\phi_{\nvdash}$ dans le membre de droite de la fusion, il vient

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\nvDash} \nsupseteq \frac{\nVdash}{\nvDash}\subsetneq \frac{h_{\nVdash}}{z^{\nvDash}} - \frac{\nVdash}{z}\frac{\partial}{\partial z} \nsupseteq \sum_{k \nleftrightarrow \nVdash}^{\infty} z^{k-\nvDash} L_{-k}\supsetneq \right\} \sum_{p \geq \nvdash} z^{p-\subsetneq h_{\nvdash} \nsupseteq h_{\nVdash} - h\supsetneq} f^{\subsetneq p \supsetneq} \nleftrightarrow \nvdash$$

Le membre de gauche est un opérateur différentiel linéaire du second ordre, régulier, à coefficients opérateurs! Nous lui cherchons une solution en série de Puiseux. Comme $h_{\nvdash} \nsupseteq h_{\nVdash} - h \nleftrightarrow j - \frac{\nVdash}{\nvDash t}$ nous obtenons une relation de récurrence

$$p\frown\subsetneq\nvDash j \nsupseteq \nVdash\supsetneq - p\frown f^{\subsetneq p\supsetneq} \nleftrightarrow \frac{\nVdash}{t}\sum_{k\geq \nVdash} L_{-k} f^{\subsetneq p-k\supsetneq}$$

Rappelons que $f^{\subsetneq p\supsetneq}$ s'annule pour $p < \nvdash$ et vaut f pour $p \nleftrightarrow \nvdash$. Comme nous nous y attendions par construction, nous obtenons une identité si $p \nleftrightarrow \nvdash$, tandis que pour $p \nleftrightarrow \nVdash, \nvDash, ..., \nvDash j$ nous obtenons une relation de récurrence simple. Enfin lorsque $p \nleftrightarrow \nvDash j \nsupseteq \nVdash$ le membre de gauche s'annule ce qui est une contrainte qui revient à annuler le vecteur singulier $\phi_{\nvdash,j}\subsetneq L\supsetneq f$ dans le module cible. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que l'algorithme qui nous produit $\phi_{\nvdash,j}$ est identique à celui décrit dans la proposition 4.1 à une transformation d'équivalence près $J_{\pm} \longrightarrow \subsetneq J_{\mp}\supsetneq^{T}$.

Nous obtenons le cas général par la fusion d'un produit de modules dont l'un au moins a un vecteur singulier. L'un des cas les plus économiques est la fusion

$$\subsetneq\nvdash, j \nsupseteq \frac{\nVdash}{\nvDash}\supsetneq \otimes \dashv\dashv\subsetneq j', -\frac{\nVdash}{\nvDash}\supsetneq\supsetneq\nsupseteq \longrightarrow \subsetneq j', j\supsetneq$$

où le premier module de Verma a un vecteur singulier de type connu au niveau $\nvDash j \nsupseteq \nvDash$ et où nous cherchons dans le module cible le vecteur singulier de type général au niveau $n \nleftrightarrow \subsetneq\nvDash j \nsupseteq \nVdash\supsetneq\subsetneq\nvDash j' \nsupseteq \nVdash\supsetneq$. Quant à la notation $\dashv\dashv\subsetneq j', -\frac{\nVdash}{\nvDash}\supsetneq\supsetneq\nsupseteq$ elle désigne comme précédemment le module de Verma génériquement irréductible $V\subsetneq c\subsetneq t\supsetneq, h_{\nVdash} \nleftrightarrow \frac{\nVdash}{\nsupseteq t} \nsupseteq \frac{\nVdash}{\nvDash} - tj\subsetneq j \nsupseteq \nVdash\supsetneq\supsetneq$. Ceci nous conduit au résultat final.

Proposition 6.2

(i) Paramétrisant la charge centrale par $c \nleftrightarrow \nVdash \nsupseteq \ntriangleleft\subsetneq\theta \nsupseteq \theta^{-\nVdash}\supsetneq^{\nvDash}$, $t \nleftrightarrow \theta^{\nvDash}$, les modules de Verma ayant des vecteurs singuliers ont un plus haut poids indexé par 2 "spins" j', j prenant les valeurs $\nvdash, \frac{\nVdash}{\nvDash}, \nVdash, ...$ selon

$$h_{j',j} \nleftrightarrow -\subsetneq j\theta \nsupseteq j'\theta^{-\nVdash}\supsetneq\subsetneq\subsetneq j \nsupseteq \nVdash\supsetneq\theta \nsupseteq \subsetneq j' \nsupseteq \nVdash, \theta^{-\nVdash}\supsetneq$$

Le vecteur singulier apparaît au niveau $n \nleftrightarrow \subsetneq\nvDash j \nsupseteq \nVdash\supsetneq\subsetneq\nvDash j' \nsupseteq \nVdash\supsetneq$. Si $jj' \nleftrightarrow \nvdash$ le vecteur singulier est donné par la proposition 4.1 et est de la forme $F \nleftrightarrow \phi_{\nvdash,j}\subsetneq L\supsetneq f$ ou $F \nleftrightarrow \phi_{j',\nvdash}\subsetneq L\supsetneq f$.

(ii) Si $jj' > \nvdash$, soit $f \equiv f^{\subsetneqq \nvdash \supsetneqq}$ le vecteur de plus haut poids dans $V\subsetneqq c, h \equiv h_{j',j}\supsetneqq$. Posons $h_{\nvdash} \nleftrightarrow h_{j' \not\supset \frac{\nVdash}{\nvDash}, \nvdash}$ $h_{\nVdash} \nleftrightarrow ⅃⅃h_{-\frac{\nVdash}{\nvDash}, \nvdash} \nsupseteqq \nsupseteqq$ comme ci-dessus et

$$\overset{\prec}{\not\phi} \nleftrightarrow \phi_{j' \not\supset \frac{\nVdash}{\nvDash}, \nvdash}\subsetneqq L_{-p} \longrightarrow \frac{\subsetneqq - \nVdash \supsetneqq^{p}}{z^{p}} \left[h_{\nVdash} \subsetneqq p - \nVdash \supsetneqq \not\supset z \subsetneqq L_{-\nVdash} - \frac{\partial}{\partial z} \supsetneqq \right] \not\supset \sum_{k \geq \nvdash} z^{k} \subsetneqq^{k \not\supset p - \nvDash}_{k} \supsetneqq L_{-p-k} \supsetneqq$$

Alors l'équation

$$\overset{\prec}{\not\phi} \sum_{k \geq \nvdash} z^{k - \subsetneqq h_{\nvdash} \not\supset h_{\nVdash} - h \supsetneqq} f^{\subsetneqq k \supsetneqq} \nleftrightarrow \nvdash$$

détermine récursivement $f^{\subsetneqq k \supsetneqq}$ pour $\nvdash < k < n \nleftrightarrow \subsetneqq \nvDash j \not\supset \nVdash \supsetneqq \subsetneqq \nvDash j' \not\supset \nVdash \supsetneqq$ en terme de f et donne au niveau n à un facteur près

$$\phi_{j',j}\subsetneqq L \supsetneqq f \nleftrightarrow \nvdash$$

où $\phi_{j',j}\subsetneqq L \supsetneqq f$ est le vecteur singulier au niveau n de $V\subsetneqq c, h_{j',j}\supsetneqq$

Exemple: Construisons $\phi_{\frac{\nVdash}{\nvDash}, \frac{\nVdash}{\nvDash}}\subsetneqq L \supsetneqq$ partant de

$$\begin{aligned}
\phi_{\nVdash, \nvdash} &\nleftrightarrow L^{\nVdash}_{-\nVdash} \not\supset \tfrac{\nvDash}{t}\subsetneqq L_{-\nVdash} L_{-\nvDash} \not\supset L_{-\nvDash} L_{-\nVdash} \supsetneqq \not\supset \tfrac{\ntrianglerighteq}{t^{\nvDash}} L_{-\nVdash} \\
h_{\nVdash} &\nleftrightarrow \tfrac{\nVdash}{\ntrianglerighteq t} \not\supset \tfrac{\nVdash}{\nvDash} - \tfrac{\nVdash}{\nvDash} t \\
L_{-\nVdash} &\longrightarrow \tfrac{\partial}{\partial z} \qquad L_{-\nvDash} \longrightarrow \tfrac{h_{\nVdash}}{z^{\nvDash}} - \tfrac{\nVdash}{z} \tfrac{\partial}{\partial z} \not\supset \textstyle\sum_{k \geq \nVdash} z^{k-z} L_{-k} \\
L_{-\nVdash} &\longrightarrow -\tfrac{\nvDash h_{\nVdash}}{z^{\nVdash}} \not\supset \tfrac{\nVdash}{z^{\nvDash}} \tfrac{\partial}{\partial z} \not\supset \textstyle\sum_{k \nleftrightarrow \nVdash}^{\infty} z^{k-\nVdash} \subsetneqq k - \nvDash \supsetneqq L_{-k}
\end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation différentielle du troisième ordre à coefficients opérateurs

$$\Big\{ \partial_z^{\nVdash} \not\supset \tfrac{y}{t} \subsetneqq h_{\nVdash} \tfrac{\nVdash}{z^{\nvDash}} \partial_z - \tfrac{\nVdash}{z} \partial_z^{\nvDash} \not\supset \textstyle\sum_{p \geq \nVdash} z^{p - \nvDash} L_{-p} \partial_z \supsetneqq \not\supset$$
$$\subsetneqq \tfrac{\nvDash}{t} \not\supset \tfrac{\ntrianglerighteq}{t^{\nvDash}} \supsetneqq \subsetneqq - \tfrac{\nvDash h_{\nVdash}}{z^{\nVdash}} \not\supset \tfrac{\nVdash}{z^{\nvDash}} \tfrac{\partial}{\partial z} \not\supset \textstyle\sum_{p \geq \nVdash} z^{p-\nVdash} \subsetneqq p - \nvDash \supsetneqq L_{-p} \supsetneqq \Big\} \textstyle\sum_{k \geq \nvdash} z^{k - \nVdash \not\supset \frac{\nVdash}{t}} f^{\subsetneqq k \supsetneqq} \nleftrightarrow \nvdash$$

Ceci est équivalent à la relation de récurrence

$$\nvdash \nleftrightarrow k \subsetneqq k - \ntrianglerighteq \supsetneqq \subsetneqq k - \nvDash - t^{-\nVdash} \supsetneqq f^{\subsetneqq k \supsetneqq} \not\supset$$
$$\not\supset \nvDash t^{-\nVdash} \textstyle\sum_{p \geq \nVdash} \left[\nvDash \subsetneqq k - \nVdash - p \not\supset t^{-\nVdash} \supsetneqq \not\supset \subsetneqq p - \nvDash \supsetneqq \subsetneqq \nVdash \not\supset \nvDash t^{-\nVdash} \supsetneqq \right] L_{-p} f^{\subsetneqq k - p \supsetneqq}$$

et nous trouvons successivement

$$\begin{aligned}
f^{\subsetneqq \nVdash \supsetneqq} &\nleftrightarrow \tfrac{\nvDash}{\nVdash \not\supset t} L_{-\nVdash} f \\
f^{\subsetneqq \nvDash \supsetneqq} &\nleftrightarrow \left[\tfrac{\nVdash}{\nVdash \not\supset t} L^{\nvDash}_{-\nVdash} \not\supset \subsetneqq \nVdash - t^{-\nVdash} \supsetneqq L_{-\nvDash} \right] f \\
f^{\subsetneqq \nVdash \supsetneqq} &\nleftrightarrow \tfrac{\nvDash}{\nVdash \subsetneqq t - \nVdash \supsetneqq} \left[\tfrac{\nVdash}{\nVdash \not\supset t} L^{\nVdash}_{-\nVdash} \not\supset \subsetneqq \nVdash - t^{-\nVdash} \supsetneqq L_{-\nVdash} L_{-\nvDash} \not\supset \tfrac{\ntrianglerighteq}{t \subsetneqq t \not\supset \nVdash \supsetneqq} L_{-\nvDash} L_{-\nVdash} \not\supset \subsetneqq \ntrianglerighteq t^{-\nVdash} - \nVdash \supsetneqq L_{-\nVdash} \right] f
\end{aligned}$$

Arrive alors l'équation au niveau 4 qui nous fournit le vecteur singulier cherché

$$\nvdash \nleftrightarrow \frac{\nvDash}{t^{\nvDash} - \nVdash} \phi_{\frac{\nVdash}{\nvDash}, \frac{\nVdash}{\nvDash}} \subsetneqq L \supsetneqq f$$

avec

$$\phi_{\frac{\nVdash}{\nvDash},\frac{\nVdash}{\nvDash}} \nleftrightarrow L^{\ntrianglerighteq}_{-\nVdash} \nsupseteq \subsetneq t - t^{-\nVdash} \supsetneq L^{\nvDash}_{-\nvDash} \nsupseteq \frac{\nVdash \subsetneq \nVdash \nsupseteq t \supsetneq^{\nvDash}}{\nvDash t} L^{\nvDash}_{-\nVdash} L_{-\nvDash} \nsupseteq \frac{\nVdash \subsetneq \nVdash - t \supsetneq^{\nvDash}}{\nvDash t} L_{-\nvDash} L^{\nvDash}_{-\nVdash} - \subsetneq t \nsupseteq t^{-\nVdash} \supsetneq L_{-\nVdash} L_{-\nvDash} L_{-\nVdash}$$

qu'on pourrait bien entendu réordonner en monômes $L_{-p_{\nVdash}} L_{-p_{\nvDash}} \ldots$ où $p_{\nVdash} \le p_{\nvDash} \le \ldots$

En matière d'épilogue nous nous bornerons à quelques remarques générales. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus on peut traduire l'existence de vecteurs singuliers par celle d'équations différentielles satisfaites par les fonctions de corrélation des champs correspondants. On connait par ailleurs, au moins sur la sphère de Riemann, des expressions intégrales de ces corrélations qui généralisent celles des fonctions hypergéométriques. Il serait intéressant de parvenir à un formalisme unifié qui associe naturellement les aspects différentiels et intégraux. A ma connaissance ce programme reste à ce jour un vœu pieux.

Nous nous sommes bornés à l'algèbre de Virasoro. Il existe une extension de ce travail au produit semi-direct de l'algèbre de Virasoro par une algèbre de Kac Moody. On a aussi considéré l'extension "superconforme" de la précédente discussion.

Quelques références

Théorie conforme

- A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **241** (1983) 333–380.
  et pour le contexte
- C. Itzykson, J.-M. Drouffe *"Théorie statistique des champs"* Interéditions Paris (1989), édition anglaise *"Statistical field theory"* Cambridge University Press (1989).

Représentations de l'algèbre de Virasoro

- V. Kac, *Lect. Notes in Math.* **94** (1979) 441–445.
- B.L. Feigin, D.B. Fuchs, *Funct. Anal. Appl.* **17** (1982) 114–126.
- *Lect. Notes in Math.* **1060** (1984) 230–245.

Systèmes intégrables

- V.G. Drinfeld and V.V. Sokolov, *J. Sov. Math.* **30** (1985) 1975–2036.

Vecteurs singuliers

- L. Benoît, Y. Saint-Aubin, *Phys. Lett.* **215B** (1988) 517–522.
- M. Bauer, P. Di Francesco, C. Itzykson, J.B. Zuber, *Nucl. Phys.B* **362** (1991) 515–562.